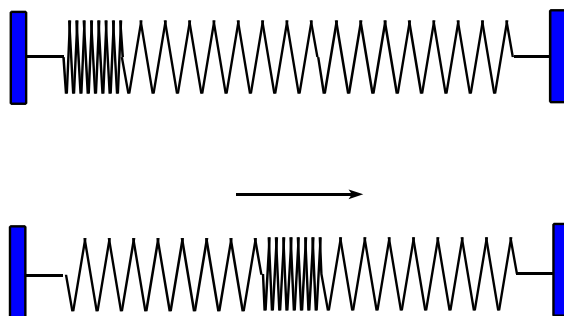


FALE W OŚRODKACH SPRĘŻYSTYCH

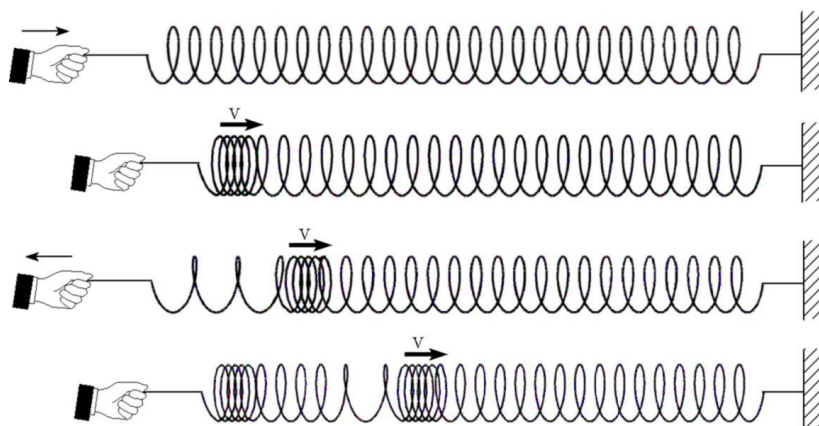
PRZYKŁADY RUCHU FALOWEGO

Zjawisko rozchodzenia się fal spotykamy powszechnie. Przykładami są fale na wodzie, fale dźwiękowe, poruszający się front przewracających się kostek domina czy też fale elektromagnetyczne (w tym radiowe i telewizyjne).

Dwie proste demonstracje rozchodzenia się ruchu falowego pokazane są na poniższych rysunkach. Na pierwszym z nich widzimy przemieszczanie się zaburzenia na sprężynie, polegającego na ściśnięciu jej części.



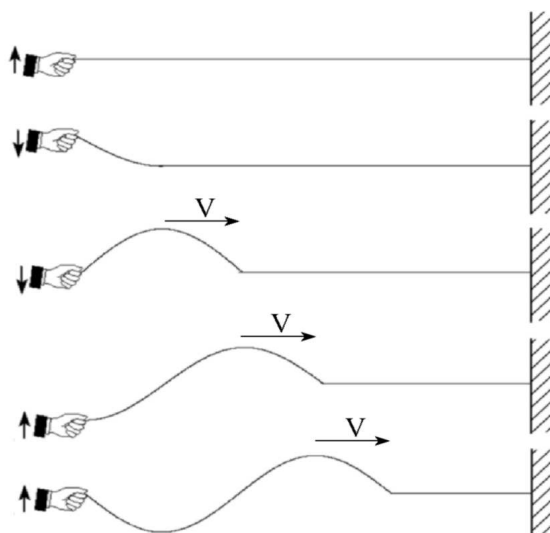
Rys.1a. Jeśli ściśniemy kilka zwojów sprężyny, to zaburzenie to będzie przemieszczało się wzdłuż niej.



Rys. 1b. Jeśli koniec sprężyny wykonuje regularny ruch harmoniczny, to wzdłuż sprężyny będzie się rozchodzić (podłużna) fala zagęszczeń i rozrzedzeń.

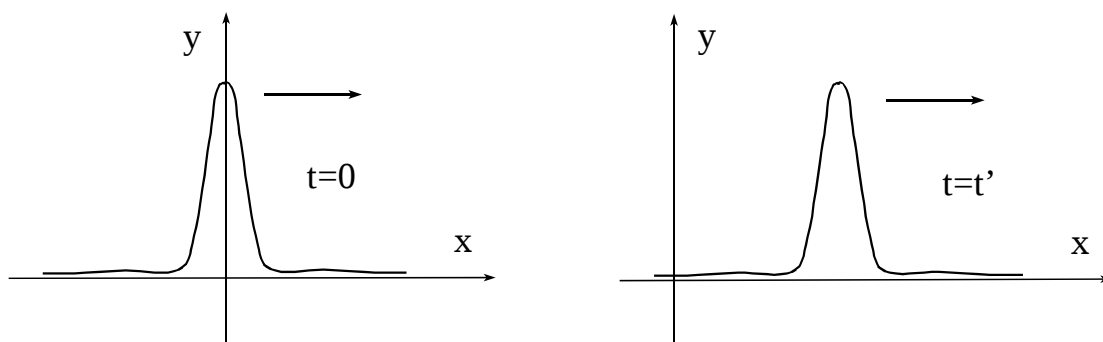
Innym sposobem zademonstrowania rozchodzenia się fali jest regularne poruszanie - góra, dół - końca sznura (drugi koniec jest zamocowany do ściany). Na sznurze będzie rozchodziło się zaburzenie pokazane na poniższym rysunku.

W obu pokazanych przypadkach zaburzenia te rozchodzą się ze ściśle określoną prędkością. Możemy więc powiedzieć, że ruch falowy polega na przemieszczaniu się zaburzenia wywołanego w ośrodku w danym punkcie.



Rys.2. Swobodny koniec sznura wykonuje ruch harmoniczny, wskutek czego na sznurze rozchodzi się fala. Robiąc szybkie zdjęcie rozchodzącego się zaburzenia, stwierdzimy, że fala ma kształt sinusoidy.

RUCH FALOWY (OGÓLNIIE)



Rys.3. Rozchodzenie się „jednorazowego” zaburzenia ośrodka, np. wybrzuszenia sznura (lub także dywanu) spowodowanego szybkim szarpnięciem jego brzegu.

Rozważmy rozchodzenie się „jednorazowego” zaburzenia ośrodka; przykładem może być tutaj szybkie szarpnięcie końca naprężonego sznura lub brzegu dywanu (leżącego na podłodze). Załóżmy, że w chwili $t = 0$ kształt sznura można przedstawić jako : $y = f(x)$. Po czasie $t=t'$, fala przesuwa się o vt w prawo, a zatem kształt sznura opisany jest jako:

$$y = f(x - vt')$$

gdy zaś fala biegnie w lewo:

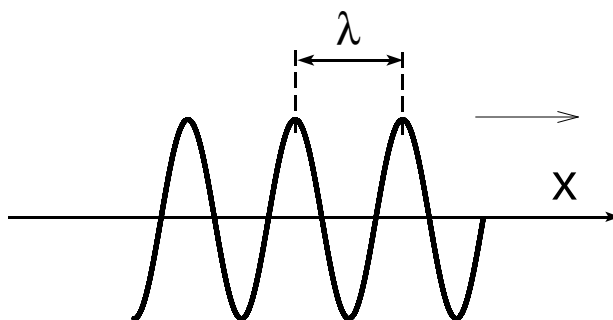
$$y = f(x + vt')$$

Wróćmy do ogólniejszego przypadku, gdy zaburzenie, które się przemieszcza, ma charakter drgania harmonicznego cząstek ośrodka w danym punkcie. Taki był właśnie przypadek przedstawiony na Rys.2. Wtedy przestrzenny kształt zaburzenia, czyli kształt sznura w dowolnym momencie, opisywany jest funkcją sinus lub cosinus (ściśłego dowodu poprawności tego założenia dostarcza rozwiązanie różniczkowego równania rozchodzącej się fali – Rów. 17).

A zatem przyjmując sinusoidalny kształt fali, np. dla $t=0$, mamy:

$$y = y_m \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \quad (3)$$

gdzie y jest wychyleniem sznura w punkcie x , zaś λ jest długością fali. Zauważmy, że wartość wychylenia poprzecznego jest taka sama dla x , $x + \lambda$, $x + 2\lambda$ itd. Długość fali jest po prostu okresem rozkładu wychyleń poprzecznych sznura.



Rys.4. „Zdjęcie migawkowe” rozchodzącej się fali, czyli kształtu jaki przyjmuje sznur, w którym ona się rozchodzi w ustalonej chwili czasu $t=t'$.

Zaburzenie, czyli kształt jaki przyjmuje sznur, przesuwa się z prędkością v ; jeśli jest to ruch w prawo, to rozkład wychyleń poprzecznych sznura opisany jest następująco :

$$y = y_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \quad (4)$$

Równanie powyższe jest równaniem fali biegnącej. Oprócz długości fali, użyteczną wielkością jest także jej okres T . Jest to czas potrzebny na przebycie przez falę odległości równej jej długości:

$$\lambda = vT \quad (5)$$

A zatem równanie fali możemy także zapisać jako:

$$y = y_m \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \quad (6)$$

Równanie to dostarcza bardzo obrazowego opisu ruchu fali. Zauważmy, że jeśli popatrzymy na drgający sznur w określonym momencie czasu ($t=t'$), wtedy równanie to mówi, że kształt sznura „sfotografowany migawkowo” jest sinusoidą z okresem (przestrzennym) λ . Z drugiej strony, jeśli zapytamy jak zachowuje się wychylenie poprzeczne cząstek ośrodka w ustalonym punkcie $x=x'$, to widzimy, że cząstki wykonują ruch harmoniczny z okresem (czasowym) T . A zatem wychylenie poprzeczne, y , ma w danej chwili (t) taką samą wartość dla x , $x + \lambda$, $x + 2\lambda$ itd., a z drugiej strony w danym miejscu (x) ma taką samą wartość w chwilach t , $t + T$, $t + 2T$ itd. Równania 4 i 6 opisują dokładnie proces rozchodzenia się fali przedstawiony na Rys.2.

Oprócz długości i okresu fali, przydatne są także w opisie ruchu falowego *liczba falowa* (k) i *częstość kołowa* (ω):

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	(7)
----------------------------	---------------------------	-------

Używając tych wielkości, możemy napisać kolejną, równoważną, postać równania fali:

$y = y_m \sin(kx - \omega t)$	(8)
-------------------------------	-------

przy założeniu, że biegnie ona w prawą stronę. Jeśli natomiast fala biegnie w lewą stronę to:

$y = y_m \sin(kx + \omega t)$	(9)
-------------------------------	-------

Prędkość przemieszczania się danego maksimum (garbka) fali, nazywamy prędkością fazową; wynosi ona :

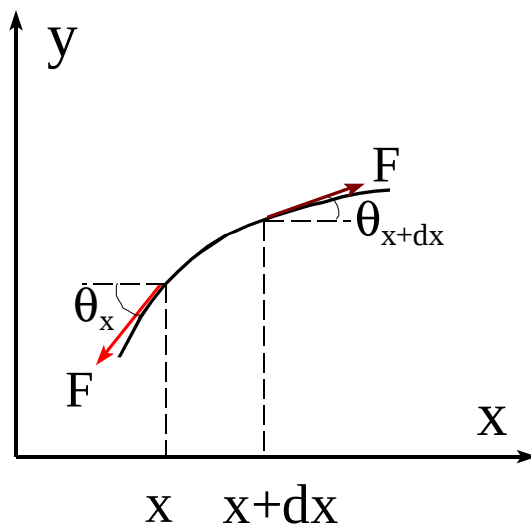
$v = \frac{\lambda}{T}$	(10)
-------------------------	--------

lub równoważnie (biorąc pod uwagę Równ. 7):

$v = \frac{\omega}{k}$	$(10 a)$
------------------------	----------

RÓWNANIE FALOWE I PRĘDKOŚĆ FALI

Wyprowadzimy teraz równanie różniczkowe oraz wzór na prędkość fali rozchodzącej się w napiętym sznurze (lub w naprężonej strunie).



Rys.5. Kawałek naprężonego sznura, w którym rozchodzi się fala sprężysta

Wyliczmy składową pionową wypadkowej siły działającej na kawałek sznura o długości dx . Zgodnie z Rys. 5:

$$F_{\text{wyp}(y)} = F \sin \theta_{x+dx} - F \sin \theta_x \cong F d\theta \quad (11)$$

Założyliśmy tutaj, że kąty θ są bardzo małe.

Jeśli przyjmiemy, że masa sznura przypadająca na jednostkę długości wynosi μ , to z II zasady dynamiki wynika, że:

$$F_{\text{wyp}(y)} = \mu dx \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (12)$$

Przyrównując prawe strony obu powyższych równań :

$$F d\theta = \mu dx \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (13)$$

stąd:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\mu}{F} \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (14)$$

Zauważmy, że kąt nachylenia sznura:

$$\theta \cong \frac{dy}{dx} \quad (15)$$

a zatem:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\mu}{F} \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (16)$$

Zauważmy, że wychylenie $y = y(x, t)$ różniczkujemy powyżej względem dwóch zmiennych (x i t), a zatem musimy użyć symboli pochodnych cząstkowych:

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (17)$
--

Jest to różniczkowe równanie fali rozchodzącej się w naprężonym sznurze (lub strunie).

Możemy łatwo sprawdzić, że w ogólnym przypadku rozwiązaniem tego równania jest funkcja $y = f(x \pm vt)$; my zaś weźmy szczególny jej przypadek, omawiany już wyżej (Równ. 8) :

$$y = y_m \sin(kx - \omega t) \quad (\text{Równ. 8})$$

Podstawmy to rozwiązanie do równania falowego (Równ. 17). Wyliczając drugie pochodne Równ. 8:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -y_m k^2 \sin(kx - \omega t) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -y_m \omega^2 \sin(kx - \omega t) \end{aligned}$$

i podstawiając je do równania falowego (Równ. 17), otrzymujemy:

$$k^2 = \frac{\mu}{F} \omega^2$$

lub:

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (18)$$

Zauważmy że:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T} \times \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = v$$

W konsekwencji, prędkość fazowa fali wynosi:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (19)$$

Dostaliśmy bardzo ważny rezultat: prędkość fali na strunie zależy tylko od masy właściwej (masy na jednostkę długości) oraz od wartości siły naprężającej sznur. Podstawiając ten rezultat (powyższe równanie) do równanie falowego (Równ. 17), to ostatnie możemy zapisać w ogólniejszej postaci :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (20)$$

Uogólnienie

Powyższe równanie (Równ. 20) zostało wyprowadzone dla przypadku jednowymiarowego, czyli dla rozchodzenia się fali w strunie. W ogólności jednak fala może się rozchodzić w ośrodku trójwymiarowym, jak np. fala głosowa w powietrzu. Przepiszmy najpierw Równ. 20, używając zmiennej ξ zamiast y do oznaczenia wychYLENIA cząstek ośrodka z położenia równowagi:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

W ośrodku trójwymiarowym wychYLENIE ξ jest funkcją położenia (x,y,z) i czasu (t) ; uogólnieniem powyższego równania jest:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (21)$$

lub krócej:

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (22)$$

gdzie: Δ oznacza operator zwany Laplasjanem; jego działanie na funkcję $\xi(x,y,z,t)$, czyli $\Delta \xi$, jest następujące:

$$\Delta \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$$

Równ. 22 jest ogólną postacią równania falowego.

Wróćmy jeszcze do problemu prędkości rozchodzenia się fali. Wyżej uzyskaliśmy rezultat (Równ. 19):

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Przypomnijmy, że F oznacza siłę naprężenia sznura (struny), zaś μ jest masą sznura na jednostkę jego długości. Wykazuje się, że powyższy rezultat można zapisać w ogólniejszej postaci (wzór Newtona):

$$v = \sqrt{\frac{M}{\rho}} \quad (23)$$

gdzie M – oznacza odpowiedni (dla danego ośrodka) współczynnik sprężystości, zaś ρ jego gęstość. I tak, np. prędkość fali podłużnej (tzn. takiej, w której drgania cząstek ośrodka są równoległe do kierunku jej propagacji), rozchodzącej się w pręcie metalowym:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (24)$$

gdzie E jest modułem Younga ośrodka.

Natomiast prędkość fali rozchodzącej się w trójwymiarowym ciele stałym wynosi:

$$v = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad (25)$$

gdzie G jest modułem sztywności, zaś K - moduł sprężystości objętościowej.

Przejdźmy teraz do fali sprężystej rozchodzącej się w gazach i cieczech; prędkość fali wynosi:

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \quad (26)$$

gdzie ρ_0 jest średnią gęstością gazu.

Rozważmy szczególny przypadek rozchodzenia się fali sprężystej w gazie w stałej temperaturze, czyli w warunkach przemiany izotermicznej; wtedy: $pV = \text{const}$ (gdzie p jest ciśnieniem, zaś V objętością), a zatem:

$$Vdp + pdV = 0$$

$$dp = -p \frac{dV}{V}$$

$$p = \frac{-dp}{\frac{dV}{V}} = K$$

Widzimy zatem, że moduł sprężystości objętościowej równy jest ciśnieniu gazu; tak więc prędkość fali w gazie przy stałej temperaturze:

$$v = \sqrt{\frac{p}{\rho_0}} \quad (27)$$

FALE STOJĄCE

Istnieje wiele sytuacji, w których obserwujemy ciekawe zjawisko fal stojących. Powstają one wtedy, gdy w danym miejscu spotykają się dwa ciągi fal o tej samej częstotliwości, prędkości i amplitudzie, ale biegnące w przeciwnych kierunkach. Przykład tego zjawiska możemy zaobserwować, gdy wytwarzamy falę na sznurze, którego koniec przywiązany jest, np. do ściany. Fala odbija się na końcu sznura, biegnie w przeciwnym kierunku i napotyka falę pierwotną. Dochodzi wtedy do sumowania się wychyleń cząstek ośrodka (zjawisko takie nazywamy interferencją). Rozważmy ten efekt ilościowo. Równania obu fal (biegnącej w prawo i w lewo) są następujące:

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2 = y_m \sin(kx + \omega t)$$

Ich suma (czyli wypadkowe wychylenie cząstek ośrodka):

$$y = y_1 + y_2 = y_m [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)] \quad (28)$$

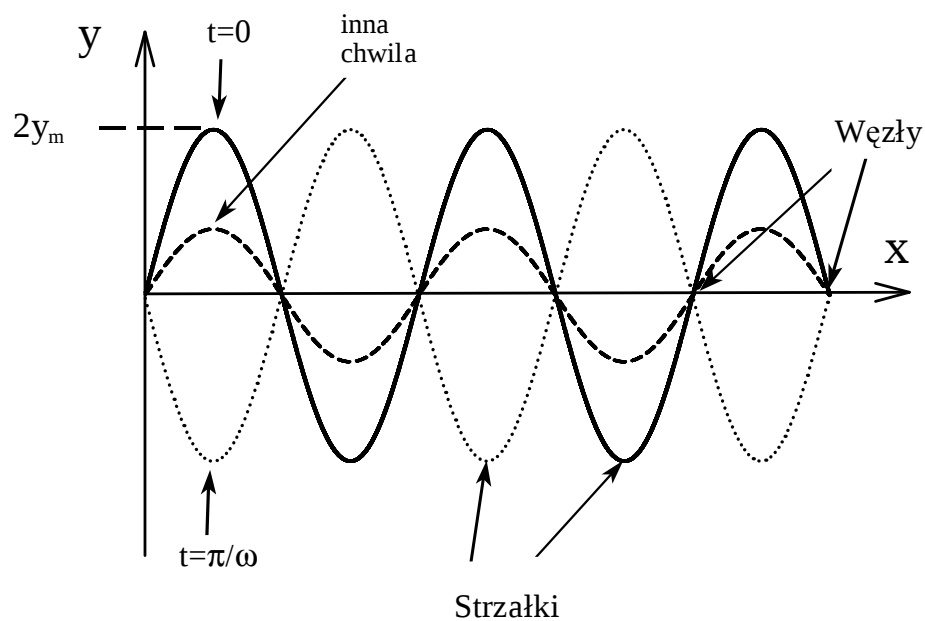
Zastosujmy znaną tożsamość trygonometryczną:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Otrzymujemy :

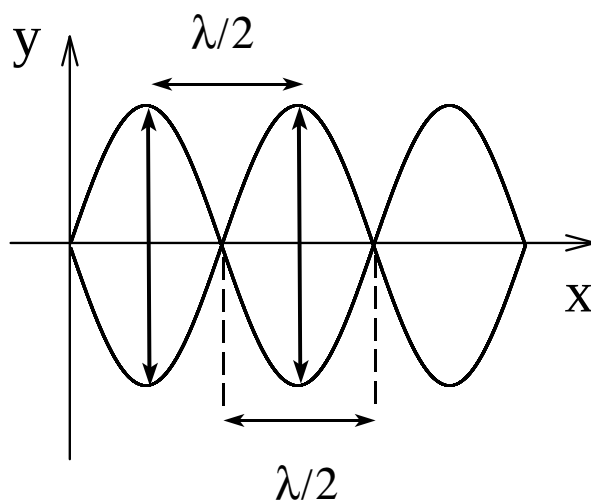
$$y = 2y_m \sin kx \cos \omega t \quad (29)$$

Jest to równanie fali stojącej; jego interpretację graficzną przedstawiono na Rysunkach 6-8. Na Rys.6 pokazano „wygląd” fali stojącej w trzech kolejnych chwilach: $t=0$, $t=\pi/\omega$ oraz w chwili pośredniej. Widać tutaj, że każdy punkt ośrodka wykonuje prosty ruch harmoniczny ($y = A \cos \omega t$), jednak amplituda tego ruchu zależy od położenia. Istnieją szczególne punkty, w których ta amplituda jest zerowa ($A=0$, są to węzły) lub maksymalna ($A=2y_m$, są to strzałki); w pozostałych punktach amplituda ma pośrednią wartość wynoszącą $A=2y_m \sin kx$.

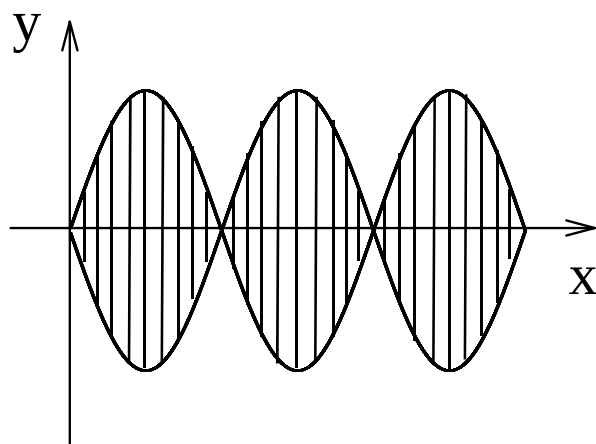


Rys. 6. Wychylenia cząstek sznura w fali stojącej w trzech różnych chwilach. Istnieją punkty sznura, w których zawsze wychylenie wynosi zero – są to węzły. W innych punktach cząstki sznura wykonują prosty ruch harmoniczny, którego amplituda zależy od położenia; miejsca, gdzie amplituda drgań jest maksymalna to strzałki.

Strzałki i węzły rozmieszczone są regularnie; odległość między dwoma strzałkami, podobnie jak między dwoma węzłami równa się połowie długości fali.



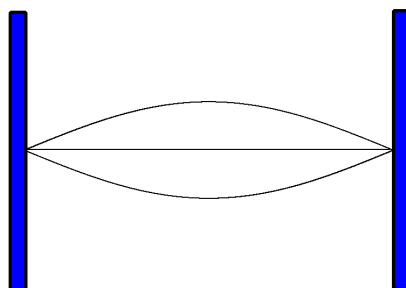
Rys. 7. Rozmieszczenie strzałek i węzłów w fali stojącej



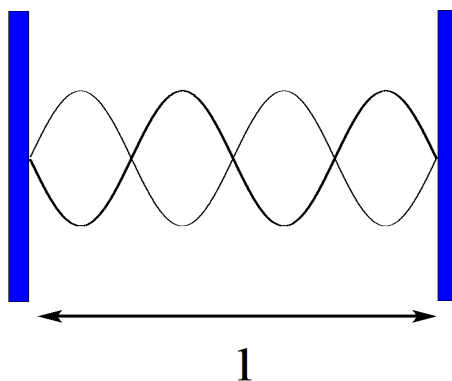
Rys. 8. Fotografia fali stojącej na sznurze (strunie) zrobiona „na długi czas”.

FAŁA STOJĄCA NA STRUNIE

Strunowe instrumenty muzyczne (np. gitara, skrzypce, fortepian) dostarczają interesującej ilustracji powstawania i wykorzystania fali stojącej. Struna zamocowana jest na obu końcach (Rys. 9), które są także węzłami dla wytwarzanej fali stojącej. Na strunie o długości l musi się „zmieścić” całkowita wielokrotność połówek długości fali stojącej (Rys. 9 i 10).



Rys. 9. Fala stojąca na strunie, zawierająca dwa węzły



Rys. 10. Fala stojąca na strunie, zawierająca pięć węzłów

Tak więc:

$$l = n \frac{\lambda}{2}$$

lub:

$$\lambda = \frac{2l}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (30)$$

Pamiętając (Równ. 10), że $f = \frac{1}{T}$ oraz, że $v = \frac{\lambda}{T}$, częstotliwość drgań przenoszonych przez falę (f) można wyrazić:

$$f = \frac{v}{\lambda}$$

Wstawiając do powyższego długość fali wyrażoną przez Równ. 30 oraz pamiętając, że

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (\text{Równ. 19})$$

otrzymujemy praktyczną relację przewidującą jakie częstotliwości dźwięku można wygenerować na strunie o długości l, naciągniętej siłą F:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (31)$$

Liczba naturalna n numeruje kolejne częstotliwości dźwięku. Dla n=1 uzyskujemy częstotliwość podstawową, zaś kolejne wartości n opisują tzw. wyższe harmoniczne.

Jeżeli do struny będą docierały drgania (wywołane przez zewnętrzne źródło dźwięku), to tylko wtedy struna zacznie wyraźnie drgać, gdy częstotliwość zewnętrznych drgań będzie bardzo bliska jednej z częstotliwości własnych struny (opisanych Równ. 31). Jest to zjawisko REZONANSU, o którym była już mowa wcześniej.